1、用几种方法证明，柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 是 2 维 C^∞ 流形。它们都是 R^3 的 C^∞ 正则子流形。

(1) $f:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2$.

$Df=(2x\ \ 2y\ \ 0)\neq 0$, rank $f=1$

由定理3, $\forall a>0$, $f^{-1}(a^2)$ 是2维 C^∞ 流形

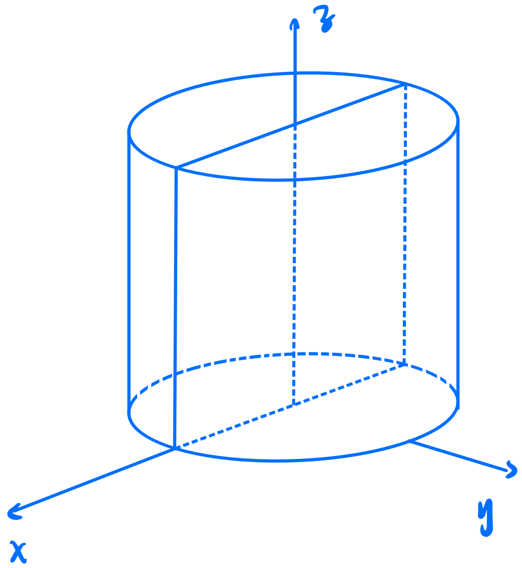
$g:\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

rank $g=1 \Rightarrow g^{-1}(1)$ 是2维 C^∞ 流形

(2) 这里用两种方法建系：柱坐标（球坐标）以及投影后加上高度的方式

柱面：$N=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1\}$

$M=\mathbb{R}^3=U_1\cup U_2\cup U_3$



$U_1=\{p\in N\mid$ 柱坐标表示下, $r>0,\ \theta\in(0,2\pi)\}$

$U_2=\{p\in N\mid$ 柱坐标表示下, $r>0,\ \theta\in(-\pi,\pi)\}$

$U_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<\frac{1}{2}\}$

$\varphi_1: U_1\to\mathbb{R}^3,\ (r,\theta,z)\mapsto(\ln r,\ \tan\frac{\theta-\pi}{2},\ z)$

$\varphi_2: U_2\to\mathbb{R}^3,\ (r,\theta,z)\mapsto(\ln r,\ \tan\frac{\theta}{2},\ z)$

$\varphi_3: U_3\to\mathbb{R}^3$, 为嵌入

$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}: (x,y,z)\mapsto(e^x, 2\arctan y, z)\mapsto(x, -\frac{1}{y}, z)$

$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: (x,y,z)\mapsto(x, -\frac{1}{y}, z)$

$\varphi_3\circ\varphi_2^{-1}: (x,y,z)\mapsto(e^x, 2\arctan y, z)\mapsto(e^x\sin(2\arctan y),$
$e^x\cos(2\arctan y), z)$

$\varphi_2\circ\varphi_3^{-1}: (x,y,z)\mapsto(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{x}{y}, z)$
$\mapsto(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \tan(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{y}), z)$

$\varphi_3\circ\varphi_1^{-1}: (x,y,z)\mapsto(e^x, 2\arctan y+\pi, z)$

$\mapsto (-e^x \sin(2\arctan y), -e^x\cos(2\arctan y), z)$

$\varphi_1\circ\varphi_3^{-1}: (x,y,z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{x}{y}, z)$

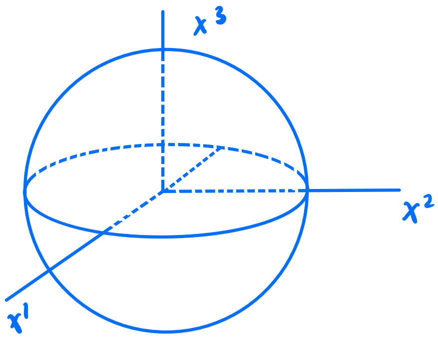
$\mapsto (\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \tan(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{y}-\frac{\pi}{2}), z)$

$\varphi_1(U_1\cap N) = \mathbb{R}^2\times\{0\}$, $\varphi_2(U_2\cap N) = \mathbb{R}^2\times\{0\}$.

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方便起见，$a=b=c=1$

(否则考虑复合微分同胚 $\psi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，$(x,y,z)\mapsto(ax,by,cz)$)

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i^+\cup U_i^-)\cup B(0,\frac{1}{2})$



$U_i^+ = \{(x^1,\cdots x^n) \mid x^i>0\}$

$U_i^- = \{(x^1,\cdots x^n) \mid x^i<0\}$

$\varphi_i^+: U_i^+\to\mathbb{R}^n$ $\quad i: B(0,\frac{1}{2})\to B(0,\frac{1}{2})$ 嵌入.

($\hat{}$ 表示删除该项)

$x=(x^1,x^2,\cdots x^n)\mapsto(\frac{x^1}{x^i},\cdots\widehat{\frac{x^i}{x^i}},\cdots\frac{x^n}{x^i}, \ln\|x\|^2)$

$\varphi_i^-: U_i^-\to\mathbb{R}^n$, $x=(x^1,\cdots,x^n)\mapsto(-\frac{x^1}{x^i},\cdots-\widehat{\frac{x^i}{x^i}},\cdots-\frac{x^n}{x^i}, \ln\|x\|^2)$

$(\varphi_i^+)^{-1}: (y^1\cdots y^n)\mapsto\sqrt{\frac{e^{y^n}}{(y^1)^2+\cdots+(y^{n-1})^2+1}}(y^1,\cdots y^{i-1},1,y^i,\cdots y^{n-1})$

$(\varphi_i^-)^{-1}: (y^1\cdots y^n)\mapsto\sqrt{\frac{e^{y^n}}{(y^1)^2+\cdots+(y^{n-1})^2+1}}(y^1,\cdots y^{i-1},-1,y^i,\cdots y^{n-1})$

$\Rightarrow$ $\varphi_i^\pm\circ(\varphi_j^\pm)^{-1}$，$i\circ(\varphi_i^\pm)^{-1}$，$\varphi_i^\pm\circ i^{-1}$ 均光滑

$\Rightarrow$ $\{(U_i^+,\varphi_i^+),(U_i^-,\varphi_i^-),(B(0,\frac{1}{2}),i)\}$ 是一个 Atlas.

$\varphi_i^\pm(U_i^\pm\cap S^{n-1}) = \varphi_i^\pm(U_i)\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$

2. 证明：$GL(n,R)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}=A \,\middle|\, \det A\neq 0\right\}$ 可以视作 R^{n^2} 中的开子流形。

参考上上次习题课讲义.

9. (1°) 设 $x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$ 关于 $x^1,\cdots,x^n$ 有 r 阶连续偏导数。

证明：超曲面

$$x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$$

是 R^{n+1} 的 n 维 C^r 正则子流形。

具体给出此超曲面的形如定理 2 中所述的特殊坐标系。

(2°) 具体给出 $S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$ 的形如定理 2 中所述的特殊坐标系。

(3°) 证明：R^n 中任何 k 维平面是 R^n 的 k 维 C^∞ 正则子流形。

(4°) 证明：圆柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 上的螺旋线 $(x,y,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta+c)$ $(b\neq0)$ 是该圆柱面的 1 维 C^∞ 正则子流形。

(5°) 证明：通常的环面

$$(x,y,z)=((b+a\cos\theta)\cos\varphi,(b+a\cos\theta)\sin\varphi,a\sin\theta)\quad(0<a<b)$$

是 R^3 中的 2 维 C^∞ 正则子流形。

(1) $F(x^1,\cdots,x^{n+1})=x^{n+1}-f(x^1,\cdots,x^n)$

$\frac{\partial F}{\partial x^{n+1}}=1 \Rightarrow \operatorname{rank} F\equiv1$

$\Rightarrow F^{-1}(0)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 codim $=1$ 的闭正则子流形

(2) 见 1(2)

(3) 定理 3 的直接应用

(4) 在局部上考虑柱坐标 (x^1,x^2)，$[x=a\cos x^1, y=a\sin x^1, z=x^2]$

$x^2=bx^1+c$ 是 1 维 C^∞ 正则子流形（由 9(1)），即证.

(5) $(b-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=a^2 \qquad (b-a)^2\le x^2+y^2\le(b+a)^2$

$F:(x,y,z)\mapsto(b-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2 \qquad x^2+y^2-2b\sqrt{x^2+y^2}$

在 $x^2+y^2>0$ 部分 C^∞.

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-\frac{2bx}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-\frac{2by}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial F}{\partial z}=2z$

在 $0<x^2+y^2<4b^2$ 上秩恒为 1. $F^{-1}(a^2)$ 是 2 维正则子流形.

10*. 证明：(1°) 例 4 中 $F(R^1)$ 在 $S^1\times S^1$ 内是稠密的。
(提示：当 α 是无理数时，$n\alpha-[n\alpha]$ 在 $[0,1]$ 内是稠密的。)
(2°) F 和 I 不是同胚映射。

(1) 引理：α 无理数时，$\{n\alpha-[n\alpha] \mid n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $[0,1]$ 内稠密

$\forall\, m>0$，$i\alpha-[i\alpha]$，$i=0,1,\cdots,m$，必有两个同属于

$[0,\frac{1}{m})$，$[\frac{1}{m},\frac{2}{m})$，$\cdots$，$[\frac{m-1}{m},1)$ 中

设为 i,j $\quad |i\alpha-[i\alpha]-j\alpha+[j\alpha]|<\frac{1}{m}$

不妨 $i\alpha-[i\alpha]\ge j\alpha-[j\alpha]$，

则 $(i-j)\alpha-[(i-j)\alpha]=i\alpha-[i\alpha]-j\alpha+[j\alpha]<\frac{1}{m}$

$\forall\, \frac{q_1}{p_1}<\frac{q_2}{p_2}\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$，取 $m=p_1p_2$，存在 n_0，s.t.

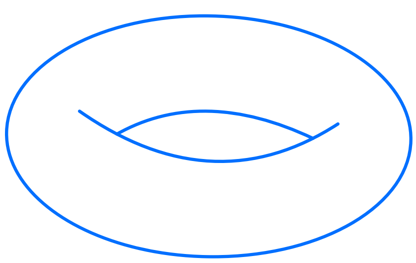
$n_0\alpha-[n_0\alpha]<\frac{1}{m}$，存在 n，s.t.

$$\frac{q_1p_2}{p_1p_2}<n\,(n_0\alpha-[n_0\alpha])<\frac{q_1p_2+1}{p_1p_2}$$

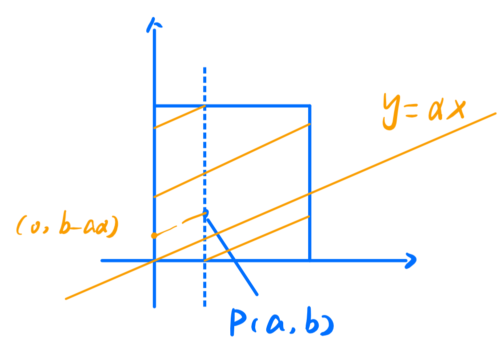
$$\Rightarrow\quad \frac{q_1p_2}{p_1p_2}<nn_0\alpha-[nn_0\alpha]<\frac{q_1p_2+1}{p_1p_2}$$

$$\Rightarrow\quad nn_0\alpha-[nn_0\alpha]\in\left(\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2}\right)\Rightarrow\{n\alpha-[n\alpha]\mid n\in\mathbb{Z}\}\ 稠密$$

回到原题，目标为证明：$\forall\, p\in T^2$，$\exists\, p_n\in F(\mathbb{R})\to p$.



$\xrightarrow[\sim]{\varphi}\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$



考虑 $x=0$ 与 $\varphi(F(\mathbb{R}))$ 的交点

存在一系列 $n_i\in\mathbb{Z}$，s.t. (因稠密性，可去掉有限个点，这里可以每次选取 n_{i+1} 时，使 $|n_{i+1}|>|n_i|$)

$n_i\alpha-[n_i\alpha]\longrightarrow b-a\alpha-[b-a\alpha]$

$\Rightarrow \psi(F(n_i+a)) \longrightarrow (a,b) \Rightarrow F(n_i+a) \to P$

(2) 取定 $F(\mathbb{R})$ 上的一点 $F(t_0)$，$\exists$ 一系列 t_i，$|t_i| > |t_{i-1}|$

$F(t_i) \to F(t_0)$，但 $t_i \not\to t_0$，故 F 不同胚

$$\begin{tikzcd} I : F(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & F(\mathbb{R}) \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

不同胚

注意题目中 $F(\mathbb{R})$ 上的不同拓扑.

2. 用简单方法直接证明 R^n 是 σ 紧的。

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} [-m,m]^n$$

3,4 直接看提示